UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIȘOARA
ȘCOALA DOCTORALĂ DE ȘTIINȚE EXACTE ȘI ȘTIINȚELE NATURII

TEZĂ DE DOCTORAT

Sisteme dinamice cu întârzieri în studiul șomajului

- rezumat -

COORDONATOR:
Prof. Univ. Dr. Habil. Mihaela Neamțu

ABSOLVENT:
Vesa Loredana Flavia

TIMIȘOARA
2024

Cuprins

Cuvinte cheie

- ecuaţii diferenţiale cu întarziere
- întârzieri
- întârzieri discrete
- întârzieri distribuite
- puncte de echilibru
- analiza stabilităţii locale
- analiza stabilităţii globale
- bifurcaţia Hopf
- model matematic
- model somaj
- strategia controlului optim
- simulări numerice

Rezumat

Motivația

Începând cu cartea seminală a lui Volterra [33] (1931), care discută impactul efectelor ereditare asupra modelelor pentru interacţiunea între specii, ecuaţiile diferenţiale cu întârziere (DDE) au câştigat o atenţie semnificativă datorită relevanţei lor în probleme de inginerie şi control. Anii 1950 şi 1960 au fost martori la dezvoltări notabile în acest domeniu, cu contribuţii importante din partea lui Myshkis [28] (1951), Krasovskii [21] (1959), precum şi Bellman și Cooke [3] (1963), Halanay [16] (1966). În deceniile 1970 şi 1980, ecuaţiile diferenţiale cu întârziere au apărut ca instrumente eficiente pentru modelarea răspunsurilor imune la infecţii şi răspândirea epidemiilor [7], [14], [19].

Ulterior, începând cu anii 1980 şi până în prezent, ţinând cont de progresele în tehnologia calculatoarelor și metodologiile matematice, ecuațiile diferențiale cu întârziere au văzut o creștere a aplicabilității și preciziei lor, permițând o extindere semnificativă a aplicațiilor lor în diverse domenii, cum ar fi sistemele biologice, inclusiv căile de semnalizare celulară și rețelele neuronale [5], [23], [30]. Ecuaţiile diferenţiale cu întârziere au fost de asemenea utile în economie pentru modelarea dinamicii pieței, efectele impozitării și comportamentul consumator-firmă [6], [9], [22], și chiar în inginerie, unde acestea au fost folosite pentru a înțelege dinamica sistemelor de control [8], [24]. Dezvoltarea metodelor numerice pentru rezolvarea DDE-urilor [2] au facilitat simularea și analiza sistemelor complexe caracterizate de întârzieri temporale. Această expansiune a aplicațiilor reflectă nu doar progresul tehnologic, ci și o înțelegere mai profundă a complexităților sistemelor reale, unde trecutul joacă un rol semnificativ în modelarea prezentului și viitorului. Ecuațiile diferențiale cu întârziere oferă o fereastră prin care cercetătorii și profesioniștii pot simula și analiza aceste procese dinamice complexe, contribuind astfel la inovații și soluții eficiente în fața provocărilor moderne.

În ceea ce privește șomajul, începând cu anii 1990, odată cu dezvoltarea teoriilor economice dinamice, ecuațiile diferențiale cu întârziere au început să fie văzute ca un instrument valoros. Modelarea șomajului cu aceste ecuații a permis economiștilor să ia în considerare influența întârzierilor, cum ar fi efectul întârziat al politicilor guvernamentale sau impactul schimbărilor tehnologice asupra pieței muncii [1], [26], [27], [31]. Astfel, modelele care includ întârzieri oferă o imagine mai clară a evoluției viitoare a pieței muncii, permițând o anticipare mai bună a tendințelor de șomaj.

Motivația pentru această teză este dată de modelele matematice existente care pun baza pentru dezvoltarea de noi abordări pentru studiul dinamicii șomajului, luând în considerare istoricul variabilelor analizate. Prezența întârzierilor influențează fluxul de informații și procesele care determină dinamica acestor sisteme. Cercetările noastre au potențialul de a oferi entităților de luare a deciziilor din societate instrumente pentru predicție și control, și de a avea un impact asupra investigațiilor modelelor matematice biologice și economice conexe.

Obiective

Obiective generale

Obiectivul general al acestei teze este de a dezvolta și investiga modele matematice pentru a aborda dinamica șomajului, utilizând teoria ecuațiilor diferențiale cu întârziere, cu scopul de a contribui la înțelegerea eficace a strategiilor de control al șomajului și a politicilor guvernamentale, și de a îmbunătăți înțelegerea interacțiunilor din piața muncii. Aceste modele oferă o reprezentare mai precisă a proceselor subdiacente care impulsionează fluctuațiile șomajului, luând în considerare factori precum decalajele de timp în răspunsurile politice și interacțiunea dintre variabilele economice. Bazându-se pe teoria ecuațiilor diferențiale cu întârziere, care captează caracteristicile dependente de timp ale ajustărilor pieței muncii, aceste modele facilitează o explorare amănunțită a complexităților dinamice inerente în tranzițiile șomajului. Prin analiza matematică riguroasă și simulare, factorii de decizie pot obține perspective asupra eficacității potențiale a diferitelor intervenții politice și pot anticipa impacturile pe termen lung ale deciziilor lor asupra ratelor șomajului.

Obiective specifice

În această teză, studiem diferite modele matematice care analizează interacțiunea dintre persoanele șomere, persoanele subocupate, imigranți, persoanele angajate regulat și locurile de muncă disponibile în cadrul teoriei stabilității ecuațiilor diferențiale cu întârziere.

Impactul potențial al rezultatelor vizează direct dezvoltarea studiilor economice viitoare legate de dinamica populației. Cea mai importantă aplicare a rezultatelor noastre se referă la elementele de predicție și control care pot fi oferite entităților decizionale ale societății.

Structura tezei şi rezultatele originale

Tema centrală a acestei teze este analiza sistemelor diferenţiale cu întârziere în studiul şomajului, luând în considerare stările trecute ale variabilelor implicate. Studiul acestor sisteme are implicaţii pentru viitoarele modele matematice cu aplicaţie în economie care încorporează dinamica populaţiei. În special, factorii de decizie strategică ai societăţii ar putea beneficia în mod semnificativ de informaţiile obţinute din această teză.

Lucrarea de faţă, intitulată "Sisteme dinamice cu întârzieri în studiul şomajului" este compusă din patru capitole. Primul capitol prezintă o scurtă motivaţie şi structura tezei, amintind rezultatele originale. Al doilea capitol al acestei lucrări reaminteşte o scurtă teorie a ecuaţiilor diferenţiale cu întârziere şi a contextului economic folosind [4], [10], [11], [12], [13], [15], [17], [20], [22], [29], [32] care este folosită în capitolele următoare. Fiecare dintre ultimele două capitole conţine trei secţiuni diferite, fiecare prezentând contribuţia originală referitoare la controlul şomajului.

Capitolul 1 prezintă o scurtă introducere a acestei lucrări, detaliind motivaţia, obiectivele şi structura tezei cu rezultatele originale. Principala motivaţie provine din modelele matematice existente care pot fi dezvoltate folosind teoria ecuaţiilor diferenţiale cu întârziere. Obiectivul acestei teze este de a construi diferite modele matematice pentru a controla situaţia şomajului, cu scopul de a investiga modalitatea prin care se poate reduce rata șomajului.

Capitolul 2 cuprinde noţiuni preliminare din perspectiva atât matematică, cât şi economică. Acest capitol începe cu o introducere în ecuaţiile diferenţiale cu întârziere, astfel, în a doua secţiune continuăm prin enumerarea tuturor definiţiilor de bază şi teoremelor referitoare la noţiunile principale de analiză a stabilităţii pentru ecuaţiile diferenţiale cu întârziere care vor fi utilizate în secţiunile următoare. În a treia secţiune, reamintim proprietăţile de bază pentru soluţiile periodice, mai precis descriem bifurcaţiile Hopf. Ultima secţiune a acestui capitol prezintă pe scurt aspectele legate de şomaj şi piaţa muncii care ne vor ajuta din punct de vedere economic să înțelegem şomajul şi modelele matematice propuse în capitolele următoare.

Capitolul 3 prezintă un model matematic pentru şomaj, luând în considerare trei variabile: numărul de persoane şomere, noile locuri de muncă create de guvern şi sectorul privat, respectiv numărul de persoane angajate. Modelul extinde rezultatele obținute de Misra şi Singh [25], prin introducerea întârzierilor discrete şi distribuite, şi efectuând o analiză matematică în cadrul ecuaţiilor diferenţiale cu întârziere.

Menţionăm că modelele matematice analizate în acest capitol sunt legate de modelul investigat în [18]. Totuşi, în acest context specific, reuşim să obţinem rezultate teoretice mai puternice. Mai precis, ca rezultat al noii abordări adoptate în acest capitol, se demonstrează pozitivitatea şi mărginirea soluţiilor modelelor matematice considerate. De asemenea, se arată că, indiferent de întârzierile de timp considerate, punctul de echilibru al modelelor propuse îşi menţine stabilitatea locală asimptotică. Mai mult, folosind o metodă precisă care implică un anumit tip de funcţie Lyapunov, demonstrăm stabilitatea sa asimptotică globală condiţionată de limita ratei de creştere a persoanelor şomere care intră pe piaţa muncii.

Toate secțiunile respectă același model și în fiecare secțiune introducem diferite tipuri de întârzieri: în prima secțiune analizăm modelul matematic introducând o întârziere de timp discretă, în a doua secțiune investigăm modelul luând în considerare o întârziere de timp distribuită, în timp ce în a treia secțiune construim și analizăm modelul considerând două întârzieri de timp distribuite. În fiecare dintre aceste secțiuni, examinăm caracteristicile de stabilitate ale punctului de echilibru al modelului și oferim diverse simulări numerice pentru a ilustra rezultatele teoretice.

În acest capitol, introducem rezultatele originale prezentate în Teorema 3.2.1, Lema 3.3.1, Teorema 3.3.2, Propoziția 3.3.7 și Teorema 3.4.1, cu demonstraţiile corespunzătoare. Aceste rezultate se referă la pozitivitatea și mărginirea soluțiilor. Ulterior, analizăm stabilitatea locală a punctelor de echilibru ale sistemului, aducând contribuții originale prin Teoremele 3.2.2, 3.2.4, 3.3.3, 3.3.4, 3.4.2 și 3.4.3. Trecând la analiza stabilității globale a punctelor de echilibru și bifurcațiilor Hopf, obţinem Lema 3.2.3, Teorema 3.3.5, Teorema 3.3.8 și Teorema 3.4.4. În plus, pentru controlul optim, prezentăm Teorema 3.2.5 și Teorema 3.2.6. De asemenea, oferim o limită superioară realistă pentru rata de creștere a persoanelor șomere care intră pe piața muncii, așa cum este discutat în Observația 3.3.1. În final, contribuțiile noastre originale sunt exemplificate prin simulări numerice.

Capitolul 4, cu titlul "Un model al șomajului cinci-dimensional", construiește și examinează un model matematic complex al pieței muncii care consideră atât șomajul, cât și subocuparea, aceasta din urmă fiind definită ca situația în care angajații lucrează mai puține ore decât și-ar dori. Modelul explorează impactul măsurilor de politică destinate să creeze locuri de muncă, alături de un proces independent de creare a locurilor de muncă și migrația forței de muncă în piața muncii. Introducem întârzieri în răspunsurile politice și evaluăm efectele acestora asupra șomajului utilizând un sistem dinamic neliniar. Analiza noastră include dinamica ieşirii din locurile de muncă şi a intrări în locurile de muncă, tranzițiile spre și dinspre subocupare, și ia în considerare migrația într-un context economic global deschis, cu acțiuni politice întârziate. Evaluăm de asemenea stabilitatea stărilor de echilibru ale sistemului, inclusiv modelele care incorporează nucleele Dirac și 1 - Gamma (weak kernels), accentuând rolul întârzierilor de timp distribuite pentru a capta mai bine complexitățile proceselor economice.

Astfel, reconsiderăm posibilitatea "locurilor de muncă limitate de timp" sau a subocupării, ca un statut intermediar pe piața muncii între angajarea regulată și șomaj. Sistemul nostru permite atât crearea de locuri de muncă, cât și intervenția politică pentru limitarea șomajului, dar și posibilitatea ca migranții să ocupe unele dintre pozițiile regulate.

Capitolul conține trei secțiuni: prima secțiune descrie modelul matematic propus, a doua secțiune prezintă modelul matematic introducând o întârziere distribuită în timp, iar în a treia secțiune expunem modelul matematic cu două întârzieri distribuite în timp. În fiecare secțiune, redactăm versiunea adimensională a modelului propus și determinăm punctele de echilibru ale modelului. Apoi, demonstrăm pozitivitatea și mărginirea soluțiilor. Mai mult, analizăm proprietățile de stabilitate locală și/sau globală pentru punctele de echilibru ale modelului. În ultima parte a fiecărei secțiuni exemplificăm rezultatele teoretice prin simulări numerice și încheiem cu concluzii.

Rezultatele originale prezentate în acest capitol includ criterii pentru pozitivitatea și mărginirea soluțiilor Teorema 4.2.1, Teorema 4.3.1, Teorema 4.4.1. Mai mult, proprietățile de stabilitate locală și globală ale punctelor de echilibru sunt prezentate în Teorema 4.2.2, Teorema 4.2.3, Teorema 4.2.4, Teorema 4.3.2, Teorema 4.3.3, Teorema 4.4.4. În plus, capitolul examinează aspecte ale bifurcațiilor Hopf, care iau în considerare nucleul 1 - Gamma (weak kernels) și nucleul Dirac, prezentate în Propoziția 4.4.5, Corolarul 4.4.6, Propoziția 4.4.7. De asemenea, sunt acoperite aspecte de control optim descrise în Teorema 4.4.8 și Teorema 4.4.9. Capitolul se încheie cu contribuții originale şi în cadrul simulărilor numerice.

Cea mai importantă contribuție a acestei teze constă în investigația riguroasă a proprietăților de stabilitate locală și globală ale modelelor matematice propuse. Observăm în cazul modelelor de șomaj tridimensionale că punctul de echilibru al modelului rămâne local asimptotic stabil indiferent de întârzieri și este global asimptotic stabil în anumite condiții. Trecând la modelele de șomaj cinci-dimensionale, obținem proprietăți de stabilitate globală pentru punctele de echilibru ale sistemului.

Rezultate proprii

Articole publicate

Articlole publicate în jurnale BDI

1. E. Kaslik, M. Neamtu, L. F. Vesa, *An unemployment model with time delay*, Annals of the Academy of Romanian Scientists: Series on Mathematics on its Applications, 2020(12), 1-2, DOI: 10.56082/annalsarscimath.2020.1-2.142.

2. L. F. Vesa - *The dynamics of an unemployment model with discrete time delay and optimal control*, Scientific Bulletin of The Politehnica University of Timisoara, 2021, 66(80), 29-37.

3. L.F. Vesa, *Dynamics of a simple mathematical model for unemployment with time delay*, Annals of West University of Timisoara - Mathematics and Computer Science 58(2), 85-95, DOI: 10.2478/awutm-2022-0019.

Articole publicate în jurnale indexate ISI

4. E. Kaslik, M. Neamtu, L. F. Vesa, *Global stability analysis of an unemployment model with distributed delay*, Mathematics and Computers in Simulation, 2021(185), 535-546, WOS:000632030900007, DOI: 10.1016/j.matcom.2021.01.010.

5. G. Tigan, O. Brandibur, E.A. Kokovics, L. F. Vesa, *Analysis of degenerate Chenciner bifurcation revisited*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 31, No. 10 (2021), WOS: 000684604000008, DOI: 10.1142/S0218127421501601.

6. E. Kaslik, M. Neamtu, L. F. Vesa, *Global Stability Analysis of a Five-Dimensional Unemployment Model with Distributed Delay*, Mathematics, Vol. 9, No. 23(2021), WOS: 000741968500001, DOI: 10.3390/math9233037.

7. G. Moza, L.F. Vesa, *Analysis of interactions between human immune system and a pathogenic virus*, Carpathian Journal of Mathematics, Vol.39(2022), no.2, 411-422, WOS: 001026963500001, DOI: 10.37193/CJM.2023.02.06.

8. L. Harding, E. Kaslik, M. Neamtu, L. F. Vesa, *A five-dimensional unemployment model with two distributed time delays*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2024, 1–16, Early View, First published: 29 March 2024, WOS: 00119320320001, DOI: 10.1002/mma.10054.

Articole publicate în proceedings-uri de conferinţe indexate ISI

9. L. F. Vesa, E. Kaslik, M. Neamţu, *Global Stability Analysis of An Unemployment Model with Two Distributed Time Delays*, In Advances in Nonlinear Dynamics: Proceedings of the Second International Nonlinear Dynamics Conference (NODYCON 2021), Volume 1 (pp. 525-535), Cham: Springer International Publishing, DOI: 10.1007/978-3-030-81162-4_46.

Bibliografie

[1] R. Al-Maalwi, S. Al-Sheikh, H. Ashi, and S. Asiri, *Mathematical modeling and parameter estimation of unemployment with the impact of training programs*, Mathematics and Computers in Simulation, 182 (2021), pp. 705–720.

[2] A. Bellen and M. Zennaro, *Numerical methods for delay differential equations*, Numerical Mathematics and Scie, 2013.

[3] R. Bellman, K. L. Cooke, R. Bellman, and J. Gillis, *Differential-difference equations*, 1963.

[4] E. Beretta and Y. Kuang, *Geometric stability switch criteria in delay differential systems with delay dependent parameters*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 33 (2002), pp. 1144–1165.

[5] G. A. Bocharov and F. A. Rihan, *Numerical modelling in biosciences using delay differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 125 (2000), pp. 183–199.

[6] R. Boucekkine, O. Licandro, and C. Paul, *Differential-difference equations in economics: on the numerical solution of vintage capital growth models*, Journal of Economic Dynamics and Control, 21 (1997), pp. 347–362.

[7] S. Busenberg and K. L. Cooke, *The effect of integral conditions in certain equations modelling epidemics and population growth*, Journal of Mathematical Biology, 10 (1980), pp. 13–32.

[8] Y.-Y. Cao and P. M. Frank, *Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach*, IEEE Transactions on fuzzy systems, 8 (2000), pp. 200–211.

[9] E. Chukwu, *Universal laws for the control of global economic growth with nonlinear hereditary dynamics*, Applied Mathematics and Computation, 78 (1996), pp. 19–81.

[10] K. L. Cooke, *Differential—difference equations*, in International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics, Elsevier, 1963, pp. 155–171.

[11] K. L. Cooke and Z. Grossman, *Discrete delay, distributed delay and stability switches*, Journal of mathematical analysis and applications, 86 (1982), pp. 592–627.

[12] K. L. Cooke and P. Van Den Driessche, *On zeroes of some transcendental equations*, Funkcialaj Ekvacioj, 29 (1986), pp. 77–90.

[13] E. Fridman, *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*, Springer, 2014.

[14] Z. Grossman and G. Berke, *Tumor escape from immune elimination*, Journal of Theoretical Biology, 83 (1980), pp. 267–296.

[15] K. Gu, J. Chen, and V. L. Kharitonov, *Stability of time-delay systems*, Springer Science & Business Media, 2003.

[16] A. Halanay, *On the method of averaging for differential equations with retarded argument*, J. Math. Anal. Appl, 14 (1966), pp. 70–76.

[17] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, vol. 99 of Appl. Math. Sci., Springer-Verlag, New York, 1991.

[18] L. Harding and M. Neamţu, *A dynamic model of unemployment with migration and delayed policy intervention*, Computational Economics, 51 (2018), pp. 427–462.

[19] H. W. Hethcote and D. W. Tudor, *Integral equation models for endemic infectious diseases*, Journal of mathematical biology, 9 (1980), pp. 37–47.

[20] M. Krasnosel'skii, *Translation along trajectories of differential equations, transl. math. monographs vol. 19*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1968), pp. 1948–49.

[21] N. Krasovskii, *On the theory of optimum control*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 23 (1959), pp. 899–919.

[22] Y. Kuang, *Delay differential equations: with applications in population dynamics*, vol. 191, Academic Press, 1993.

[23] M. Y. Li, J. R. Graef, L. Wang, and J. Karsai, *Global dynamics of a seir model with varying total population size*, Mathematical biosciences, 160 (1999), pp. 191–213.

[24] B. Mensour and A. Longtin, *Synchronization of delay-differential equations with application to private communication*, Physics Letters A, 244 (1998), pp. 59–70.

[25] A. Misra and A. K. Singh, *A delay mathematical model for the control of unemployment*, Differential Equations and Dynamical Systems, 21 (2013), pp. 291–307.

[26] A. Misra, A. K. Singh, and P. K. Singh, *Modeling the role of skill development to control unemployment*, Differential Equations and Dynamical Systems, (2017), pp. 1–13.

[27] S. B. Munoli and S. Gani, *Optimal control analysis of a mathematical model for unemployment*, Optimal Control Applications and Methods, 37 (2016), pp. 798–806.

[28] A. D. Myshkis, *On solutions of linear homogeneous differential equations of the first order of stable type with a retarded argument*, Matematicheskii Sbornik, 70 (1951), pp. 641–658.

[29] S. B. Norkin et al., *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*, Academic Press, 1973.

[30] V. S. H. Rao and B. R. Phaneendra, *Global dynamics of bidirectional associative memory neural networks involving transmission delays and dead zones*, Neural networks, 12 (1999), pp. 455–465.

[31] A. K. Singh, P. K. Singh, and A. K. Misra, *Combating unemployment through skill development*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 25 (2020), pp. 919–937.

[32] H. L. Smith, *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, vol. 57, Springer New York, 2011.

[33] V. Volterra, *Théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthiers-Villars, 1931.