UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA
ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

NONLINEAR GRASSMANNIANS AND THEIR GENERALIZATIONS

Rezumat

COORDONATOR:
Prof. Dr. Cornelia VIZMAN

ABSOLVENT:
Ioana CIUCLEA

TIMIŞOARA
2024

1 Rezumat

Grassmannianul neliniar este versiunea neliniară a Grassmannianului subspațiilor liniare de dimensiune fixată într-un spațiu vectorial dat. Mai precis, Grassmannianul neliniar de tip S în M, notat $\mathrm{Gr}_S(M)$, este format din toate subvarietățiile unei varietăți diferențiabile M care sunt difeomorfe cu o varietate diferențiabilă S. Varietatea S este închisă, dar nu neapărat conexă, și avem $\dim S \leq \dim M$. Grassmannianul neliniar $\mathrm{Gr}_S(M)$ este spațiul bază al unui fibrat principal cu spațiu total $\mathrm{Emb}(S, M)$, care reprezintă spațiul scufundărilor de la S la M, și grup structural $\mathrm{Diff}(S)$, acesta din urmă fiind grupul Lie al difeomorfismelor de la S la S. Aceste spații se pot înzestra cu structuri de varietăți Frećhet.

Generalizarea Grassmannianului neliniar este varietatea drapelelor neliniare. Fie $\mathscr{S} = (S_1, \ldots, S_r)$. Un drapel neliniar de tip $\mathscr{S}$ în M este un r-tuplu $(N_1, \ldots, N_r)$ de subvarietăți ale lui M, fiecare N_i difeomorf cu S_i corespunzător, care sunt scufundate una în cealaltă: $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_r$. Varietatea reperelor neliniare, care este formată din colecții adecvate de scufundări de la S_i la M, reprezintă spațiul total al unui fibrat principal peste varietatea drapelelor neliniare, $\mathrm{Flag}_{\mathscr{S}}(M)$ cu grup structural $\prod_{i=1}^{r} \mathrm{Diff}(S_i)$.

Varietatea drapelelor neliniare $\mathrm{Flag}_{\mathscr{S}}(M)$ este o subvarietate diferențiabilă de tip Fréchet a varietății produs $\prod_{i=1}^{r} \mathrm{Gr}_{S_i}(M)$. Mai poate fi privită și ca un turn de Grassmannieni, mai precis ca un produs torsionat al Grassmannienilor neliniari $\mathrm{Gr}_{S_1}(S_2)$,..., $\mathrm{Gr}_{S_{r-1}}(S_r)$ și $\mathrm{Gr}_{S_r}(M)$. Atât Grassmannianul neliniar și varietatea de drapele neliniare pot fi decorate cu diverse structuri, pentru a le îmbogăți proprietățiile. Acest lucru se poate realiza într-un mod elegant cu ajutorul fibratelor asociate.

Obiectivul acestei teze este prezentarea diferitelor domenii în care varietățiile de drapele neliniare apar și se dovedesc utile. Teza este structurată în patru capitole: Introducere (Introduction), Grassmannieni neliniari și drapele neliniare (Nonlinear Grassmannians and nonlinear flags), Curbe de vorticitate decorate cu puncte de vorticitate (Pointed vortex loops), Spații de forme formte din drapele neliniare (Shape spaces of nonlinear flags).

În primul rând, în capitolul al doilea, prezentăm teoria existentă cu privire la Grassmannieni neliniari și varietățiile de drapele neliniare [17, 18]. Prezentăm câteva structuri diferite cu care putem decora un drapel neliniar (orientări, densități, forme volum), discutăm modul în care fixarea unui șir de scufundări $S_1 \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} S_2 \overset{\iota_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\iota_{r-1}}{\hookrightarrow} S_r$ influnețează $(N_1, \ldots, N_r)$, și oferim exemple pentru cazurile considerate.

În capitolul trei, arătăm cum anumite configurații de vorticități singulare în fluide ideale doi-dimensionale pot fi realizate ca orbite coadjuncte ale grupului de difeomorfisme Hamiltoniene ale planului [14]. Acestea sunt punctele de vorticitate, curbele de vorticitate și curbele de vorticitate decorate cu puncte de vorticitate, pe care le numim "pointed vortex loops". Facem o paralelă între curbele de vorticitate decorate cu puncte și drapelele neliniare modelate pe $\mathscr{S} = (S_1, S_2)$ unde S_1 este o mulțime de k puncte din plan și S_2 cercul unitate. Rezultatele originale din acest capitol au fost publicate în [6].

În final, în capitolul al patrulea, investigăm problema înzestrării unui spațiu de suprafețe decorate cu curbe cu o metrică Riemanniană de tip elastic, motivați de dorința de a compara două obiecte fără a ține cont de modul în care acestea sunt parametrizate. Forma unei suprafețe este invariantă la reparametrizare, de aceea definim spațiul formelor ("shape space") ca spațiul cât al spațiului tuturor scufundărilor posibile ale curbei sau suprafeței în raport cu acțiunea grupului reparametrizărilor. O metrică Riemanniană pe acest spațiu ne dă posibilitatea de a calcula geodezice independent de modul în care suprafețele sau curbele sunt parametrizate.

Spațiul formelor format din suprafețe decorate cu curbe reprezintă un exemplu de varietate de drapele neliniare de tip $S^1 \overset{\iota}{\hookrightarrow} S^2$, unde S^1 este cercul unitate scufundat în sfera unitate S^2 ca ecuator. În acest caz, grupul reparametrizărilor constă în difeomorfisme ale sferei care pot fi restricționate la difeomorfisme ale ecuatorului. Pentru a obține o metrică Riemanniană pentru spațiul nostru de forme, combinăm metrica elastică pentru curbe dezvoltată în [30] și metrica elastică pentru suprafețe dezvoltată în [21], urmărind procedura descrisă în [33]. Rezultatele originale din acest capitol au fost publicate în [5].

Cuvinte cheie: Grasmannian neliniar, drapel neliniar, orbită coadjunctă, metrică elastică, punct de vorticitate, curbă de vorticitate, spaţiu de forme.

2 Summary

The nonlinear Grassmannian is the nonlinear version of the Grassmannian of linear subspaces of fixed dimension in a given vector space. More precisely, the nonlinear Grassmannian of type S in M, denoted by $\mathrm{Gr}_S(M)$, consists of all submanifolds of a smooth manifold M that are diffeomorphic to a smooth manifold S. Here S is a closed but not necessarily connected manifold, with $\dim S \leq \dim M$. The nonlinear Grassmannian $\mathrm{Gr}_S(M)$ represents the base space of a principal bundle with total space $\mathrm{Emb}(S, M)$, the space of embeddings of S into M, and structure group $\mathrm{Diff}(S)$, the latter denoting the Lie group of diffeomorphisms of S. These spaces can be endowed with Fréchet manifold structures.

The nonlinear Grassmannian generalizes to the manifold of nonlinear flags as follows. Let $\mathscr{S} = (S_1, \dots, S_r)$. A nonlinear flag of type $\mathscr{S}$ in M is an r-tuple $(N_1, \dots, N_r)$ of submanifolds of M, each N_i diffeomorphic to the corresponding S_i, that are embedded into each other: $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_r$. The manifold of nonlinear frames, consisting of a suitable collection of embeddings from S_i into M, represents the total space of a principal bundle over the nonlinear flag manifold $\mathrm{Flag}_{\mathscr{S}}(M)$, with structure group $\prod_{i=1}^{r} \mathrm{Diff}(S_i)$.

The nonlinear flag manifold $\mathrm{Flag}_{\mathscr{S}}(M)$ is a splitting smooth Fréchet submanifold of the product manifold $\prod_{i=1}^{r} \mathrm{Gr}_{S_i}(M)$. It may also be regarded as a tower of Grassmannians, more precisely as a twisted product of the nonlinear Grassmannians $\mathrm{Gr}_{S_1}(S_2)$,..., $\mathrm{Gr}_{S_{r-1}}(S_r)$ and $\mathrm{Gr}_{S_r}(M)$. Both the nonlinear Grassmannian and nonlinear flag manifold can be decorated with various structures in order to enrich their properties. This is done in an elegant way via associated bundle constructions.

The objective of the present thesis is to showcase the different areas in which manifolds of nonlinear flags appear and prove to be useful.

Firstly, in chapter two we survey the existing theory of nonlinear Grassmannians and nonlinear flags [17, 18]. We showcase a few different structures with which we can endow nonlinear flags (orientations, densities, volume forms), discuss the ways in which fixing a sequence of embeddings $S_1 \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} S_2 \overset{\iota_2}{\hookrightarrow} \dots \overset{\iota_{r-1}}{\hookrightarrow} S_r$ affects $(N_1, \dots, N_r)$, and provide low dimensional examples of the different cases under consideration.

In the third chapter, we show how several singular vortex configurations in ideal two-dimensional fluids can be realised as coadjoint orbits of the group of Hamiltonian diffeomorphisms of the plane [14]. These are point vortices, vortex loops, and pointed vortex loops; we define the latter as a combination of the first two. We draw a parallel between pointed vortex loops and nonlinear flags modeled on $\mathscr{S} = (S_1, S_2)$ where S_1 is a set of k points in the plane and S_2 is the unit circle. The original results in this chapter have been published in [6].

Finally, in the fourth chapter, we investigate the problem of endowing a space of surfaces decorated with curves with a Riemannian metric of elastic type, motivated by the desire to compare two objects without caring about the way in which they are parameterized. The shape of a surface is invariant to reparameterization, therefore we define a shape space as the quotient space of the space of all possible embeddings of a curve/surface by the group of reparameterizations. Having a Riemannian metric on this shape space allows us to compute geodesics independently of the way surfaces and curves may be parameterized.

The shape space of surfaces decorated with curves represents an example of a nonlinear flag manifold of type $S^1 \overset{\iota}{\hookrightarrow} S^2$, where S^1 is the unit circle embedded as the equator in the unit sphere S^2. In this case, the group of reparameterizations consists of diffeomorphisms

of the sphere that restrict to diffeormophisms of the equator. We combine the elastic metric for curves developed in [30] and the elastic metric for surfaces developed in [21], following the gauge invariance procedure described in [33], to obtain a Riemannian metric for our shape space.

The original results in this chapter have been published in [5].

Keywords: nonlinear Grassmannian, nonlinear flag, coadjoint orbit, elastic metric, point vortex, vortex sheet, shape space.

3 Lista publicațiilor

1. I. Ciuclea, A.B. Tumpach and C. Vizman, Shape spaces of nonlinear flags, *Proc. GSI 2023: Geometric Science of Information, Lecture Notes in Computer Science, ed. F. Nielsen and F. Barbaresco* (2023), 44–50.

2. I. Ciuclea and C. Vizman, Pointed vortex loops in ideal 2D fluids, *J. Phys. A: Math. Theor. 56, 245201* (2023) (15pp).

3. I. Ciuclea, A.B. Tumpach and C. Vizman, Connections on principal bundles of embeddings, in progress.

4. I. Ciuclea, S. Haller and C. Vizman, A dual pair related to nonlinear flag manifolds, in progress.

References

[1] H. Aref, Point vortex dynamics: A classical mathematics playground, *J. Math. Phys. 48, 065401.* (2007)

[2] V. Arnold, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications á l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 16 (1966), 319–361.

[3] G.K. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics, *Cambridge University Press* (2012).

[4] I. Ciuclea, A.B. Tumpach and C. Vizman, Connections on principal bundles of embeddings, in progress.

[5] I. Ciuclea, A.B. Tumpach and C. Vizman, Shape spaces of nonlinear flags, *Proc. GSI 2023: Geometric Science of Information, Lecture Notes in Computer Science, ed. F. Nielsen and F. Barbaresco* (2023), 44–50.

[6] I. Ciuclea and C. Vizman, Pointed vortex loops in ideal 2D fluids, *J. Phys. A: Math. Theor. 56, 245201* (2023) (15pp).

[7] I. Ciuclea, S. Haller and C. Vizman, A dual pair related to nonlinear flag manifolds, in progress.

[8] M. Crainic, Mastermath course Differential Geometry 2015/2016, lecture notes, Differential Geometry, Urecht University (2015/2016).

[9] D. Ebin and J. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, *Ann. of Math., 92(2)*(1970), 102–163.

[10] F. Gay-Balmaz and C. Vizman, Dual pairs in fluid dynamics, *Ann. Global Anal. Geom. 41* (2012), 1–24.

[11] F. Gay-Balmaz and C. Vizman, Isotropic submanifolds and coadjoint orbits of the Hamiltonian group, *J. Symp. Geom. 17(3)*(2019), 663–702.

[12] F. Gay-Balmaz and C. Vizman, Vortex sheets in ideal 3D fluids, coadjoint orbits, and characters, arXiv:1909.12485 (2020)

[13] F. Gay-Balmaz and C. Vizman, Principal bundles of embeddings and nonlinear Grassmannians, *Ann Glob Anal Geom. 46* (2014), 293–312.

[14] G.A. Goldin, R. Menikoff and D.H. Sharp, Diffeomorphism groups and quantized vortex filaments, *Phys. Rev. Lett. 58* (1987), 2162–2164.

[15] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone , Connections, Curvature, and Cohomology. Vol. I: De Rham Cohomology of Manifolds and Vector Bundles, *Pure and Applied Mathematics, 47* (1972), Academic Press, New York.

[16] S. Haller and C. Vizman, Non-linear Grassmannians as coadjoint orbits, *Math. Ann. 329* (2004), 771–785.

[17] S. Haller and C. Vizman, Non-linear flag manifolds as coadjoint orbits, *Ann. Global Anal. Geom. 58* (2020), 385–413.

[18] S. Haller and C. Vizman, Weighted non-linear flag manifolds as coadjoint orbits, *Canadian Journal of Mathematics, published online* (2023), 1-31.

[19] R.S. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser. Bull, *Amer. Math. Soc. 7*, (1982), 65–222.

[20] A. Izosimov and B. Khesin, Vortex sheets and diffeomorphism groupoids, *Advances in Math. 338* (2018), 447–501.

[21] I.H. Jermyn, S. Kurtek, E. Klassen and A. Srivastava, Elastic shape matching of parameterized surfaces using square root normal fields, *ECCV(5)* (2012), 804–817.

[22] A. Kriegl, P.W. Michor, The Convenient Setting of Global Analysis, *Mathematical Surveys and Monographs Volume 53*, American Mathematical Society (1997).

[23] B. Lee, Geometric structures on spaces of weighted submanifolds, *SIGMA, 5, 099* (2009), 46 pages.

[24] P. Libermann and C.M. Marle, Symplectic Geometry and Analytical Mechanics, D. Reidel Publishing Company (1987).

[25] J.E. Marsden, T. Ratiu, Introduction to Mechanics and Symmetry, Springer (1999).

[26] J.E. Marsden and A. Weinstein, Coadjoint orbits, vortices, and Clebsch variables for incompressible fluids, *Phys. D, 7* (1983), 305–323.

[27] D. McDuff and D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, *Second Edition, Oxford Graduate Texts in Math., 27*, Oxford University Press (2005).

[28] M. Micheli, P.W. Michor and D. Mumford, Sobolev metrics on diffeomorphism groups and the derived geometry of spaces of submanifolds, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., 77*(2013), 109–138.

[29] A. Srivastava and P.E Klassen, Functional and Shape Data Analysis, Springer-Verlag (2016)

[30] W. Mio, A. Srivastava and S.H. Joshi, On shape of plane elastic curves, *International Journal of Computer Vision, 73, no. 3* (2007), pp. 307–324.

[31] J. Moser, On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc., 120* (1965), 286–294.

[32] A. Srivastava, E. Klassen, S.H. Joshi and I.H. Jermyn, Shape analysis of elastic curves in euclidean spaces, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 33, no. 7* (2011) pp. 1415–1428.

[33] A.B. Tumpach, H. Drira, M. Daoudi and A. Srivastava, Gauge Invariant Framework for Shape Analysis of Surfaces, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 38, no 1*(2016).

[34] A.B. Tumpach, Gauge Invariance of degenerate Riemannian metrics, *Notices of American Mathematical Society* (2016).

[35] A. B. Tumpach and S. Preston, Three methods to put a Riemannian metric on shape spaces, *Proc. GSI 2023: Geometric Science of Information, Lecture Notes in Computer Science, ed. F. Nielsen and F. Barbaresco, Springer*(2023), 3–11.

[36] C. Vizman, Induced differential forms on manifolds of functions, *Archivum Mathematicum, 47*(2011), 201–215.

[37] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds. *J. Diff. Geom., 18*(1983), 523–557.

[38] A. Weinstein, Connections of Berry and Hannay type for moving Lagrangian submanifolds, *Adv. Math., 82*(1990), 133–159.